**BAB 7**

**INTEGRAL**

* Standar Kompetensi

Mahasiswa dapat menjelaskan dan menentukan nilai integral.

* Kompetensi dasar

1. Mahasiswa dapat menjelaskan integral tak tentu dan sifat-sifatnya.
2. Mahasiswa dapat menentukan nilai integral tak tentu.
3. Mahasiswa dapat menjelaskan integral tentu dan sifat-sifatnya.
4. Mahasiswa dapat menentukan nilai integral tentu.

* Pokok Bahasan

1. Integral tak tentu
2. Sifat-sifat integral tak tentu
3. Integral tentu
4. Sifat-sifat integral tentu

**7.1. Integral Tak Tentu**

Konsep integral tak tentu diperkenalkan sebagai kebalikan dari pendiferensialan, yaitu bentuk paling umum dari anti turunan. Sedangkan integral tentu diperkenalkan sebagai limit dari jumlahan Riemann dari perhitungan luas daerah tertutup pada bidang datar. Kaitan antara integral dan diferensial dinyatakan sebagai Teorema Dasar Kalkulus.

Untuk fungsi  yang terdefinisi pada interval buka , maka dapat ditentukan suatu fungsi  yang memenuhi . Fungsi F seperti ini disebut anti turunan dari .

Definisi

Fungsi  disebut anti turunan dari  pada interval  jika  untuk setiap .

Teorema

Jika  adalah anti turunan  pada interval  maka bentuk  yang paling umum adalah  dengan C adalah konstanta sebarang.

Contoh 7.1

1. Misalkan  maka anti turunannya adalah  sehingga  (sebab turunan dari  adalah )
2. Misalkan  maka anti turunannya adalah  sehingga  ( ingat turunan dari  adalah )

Proses menemukan anti turunan (anti diferensial) dari fungsi pada  dinamakan integral tak tentu dari fungsi  pada interval , dan ditulis dengan lambang

.

Contoh 7.2

Berdasarkan Contoh 7.1 diperoleh

, dan

.

**7.2. Sifat-sifat integral tak tentu**

Sifat-sifat dari integral tak tentu antara lain:

1. Linearitas

Jika fungsi  dan  mempunyai anti turunan dan  konstanta maka

1. 
2. 
3. 
4. Jika  dan  bilangan rasional maka

 dan 

1. Integral dengan penggantian (substitusi)

Jika  fungsi yang terdiferensialkan pada interval  dan  fungsi yang terdefinisi pada  serta  anti turunan dari  maka dengan memisalkan 

.

1. Integral fungsi eksponensial



1. Integral fungsi Trigonometri
2.  d. 
3.  e. 
4.  f. 

Contoh 7.3 Tentukan integral .

Solusi:

.

Contoh 7.4 Tentukan integral .

Solusi:

.

Contoh 7.5 Tentukan .

Solusi:

Misalkan  maka .

Jadi 



Contoh 7.6 Tentukan .

Solusi:

Misalkan  maka  dan 







.

Contoh 7.7 Tentukan integral .

Solusi:

Misalkan  maka  sehingga 

.

**Latihan 7.1**

1.  5. 
2.  6. 
3.  7. 
4.  8. Tunjukkan bahwa 

**7.3. Integral Tentu**

Luas bidang D yang dibatasi oleh fungsi  , garis , garis , dan sumbu  dengan  untuk setiap .

*f*

*D*

*b*

*a*

Gambar 7.1 Fungsi f pada [*a,b*] dan Jumlahan Riemann

Interval  dibagi dalam  subinterval yang sama panjang, dengan titik partisinya adalah  dengan .

Subinterval  dengan panjang subinterval . Panjang partisi dinotasikan dengan  dan didefinisikan sebagai .

Pilih ,  dan bentuk persegipanjang dengan alas  dan tinggi , sehingga luas persegipanjang ke-i adalah .

Bila ada n persegipanjang (n subinterval) maka luas kurva D dapat dihampiri dengan n luas persegipanjang tersebut, yaitu

 (disebut jumlahan Riemann dari  pada ).

Luas yang sebenarnya (luas eksak) dari D dapat diperoleh bila  (banyaknya subinterval tak hingga). Hal ini sama saja bila .

Jadil

.

Jika limit di atas ada, maka dikatakan bahwa fungsi  terintegral pada  dan ditulis

.

Definisi

Integral tentu dari fungsi  pada  ditulis  didefinisikan oleh



asalkan limit ini ada.

Contoh 7.8 Hitunglah !

Solusi:

Diketahui  pada .

Kita bagi interval  ke dalam 4 subinterval

dengan panjang  yaitu .

4

0

Kemudian masing-masing kita pilih

titik tengah .



.

Jadi .

**7.4. Sifat-sifat Integral Tentu**

Beberapa sifat integral tentu diberikan sebagai berikut.

1. , dengan c konstanta sebarang.
2. 
3. 
4. 
5. 
6. Jika  untuk setiap  maka .
7. Jika  untuk setiap  maka .
8. Jika  untuk setiap  maka .

Teorema Dasar Kalkulus

1. Jika  fungsi kontinu pada  dan  anti turunan dari  pada  maka

.

1. Jika  fungsi kontinu pada  maka  terdiferensialkan pada  dengan  untuk setiap .

Contoh 7.9 Tentukan nilai integral .

Solusi:



.

Contoh 7.10 Tentukan nilai integral .

Solusi:

Kita gunakan substitusi, misalkan  maka  sehingga 







.

Contoh 7.11 Tentukan nilai integral .

Solusi:

Kita gunakan substitusi trigonometri (teknik pengintegralan dibahas lebih khusus di bab 8), misalkan  maka  sehingga







.

Teorema (Teorema Simetri)

1. Jika  fungsi genap maka .
2. Jika  fungsi ganjil maka .

Contoh 7.12 Hitung !

Solusi:

Karena  fungsi genap () maka

.

Contoh 7.13 Hitung !

Solusi:

Karena  fungsi ganjil maka .

Latihan 7.2

Tentukan nilai integral di bawah ini!

1.  6.  11. 
2.  7. 
3.  8. 
4.  9. 
5.  10. 